Colle du 24/05 - Sujet 1
Intégration et probabilités

Question de cours. Démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice 1. On considère une urne contenant autant de boules rouges que de boules vertes. Pour $n \geqslant 2$, on effectue n tirages successifs indépendants avec remise dans cette urne. On note

- A : « on a obtenu au cours des n tirages au plus une boule rouge »
- B : « on a obtenu au cours des n tirages des boules de chacune des couleurs ».

Etudier l'indépendance de A et B.

Exercice 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^3}\frac{1}{t^2\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Colle du 24/05 - Sujet 2
Intégration et probabilités

Question de cours. Théorème des sommes de Riemann : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.

Exercice 1. On possède trois dés dont l'un est truqué et dont la probabilité d'obtenir 6 est trois plus élevée que les autres. On choisit uniformément un dé et on le lance une fois. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé pipé sachant que l'on a obtenu 6 ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |\cos(x) - P(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Le polynôme P est-il unique ?

Colle du 24/05 - Sujet 3
Intégration et probabilités

Question de cours. Théorème fondamental de l'analyse : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Un skieur choisit aléatoirement une piste rouge ou une piste noire. Il a une probabilité $1/6$ de tomber sur une piste rouge et $1/5$ sur une piste noire. S'il tombe, il change de piste et sinon il recommence la même piste.

1. Calculer la probabilité d'être sur la piste rouge à l'étape n.
2. Calculer la probabilité qu'il tombe à l'étape n sachant qu'il ne tombe pas à l'étape $n+1$.